Pregătire pentru BAC – 27.03.2021

Funcția de gradul al II-lea. Ecuația de gradul al doilea și ecuații reductibile la aceasta

• Funcția de gradul al II-lea:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$f(0) = c$

$\boxed{G_f \cap O_y = \{(0, c)\}}$

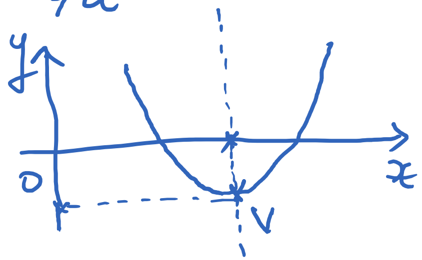
Graficul acestei funcții este o parabolă.

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

$x_V = -\frac{b}{2a}$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

- Dacă $a > 0$: Parabola are vârful în jos



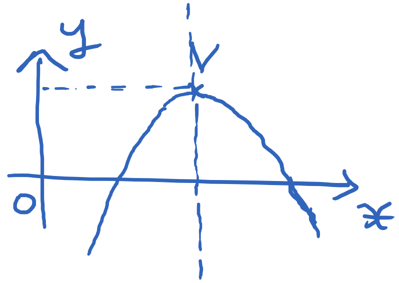
f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$

f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$

- Dacă $a<0$: Parabola are vârful în sus

f este strict crescatoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$

f este strict descrescatoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$



- Ecuația de gradul al II-lea:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

I $\Delta>0 \Rightarrow$ Ecuația are două rădăcini reale distincte $x_1\neq x_2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

II $\Delta=0 \Rightarrow$ Ecuația are răd. reale egale $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ (răd. dublă)

III $\Delta<0 \Rightarrow$ Ecuația nu are răd. reale

Relațiile lui Viète: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$ (relații între rădăcini și coeficienți)

x_1, x_2 – rădăcini

$$a x_1^2 + b x_1 + c = 0 \quad | \cdot x_1^{n-2}$$
$$a x_2^2 + b x_2 + c = 0 \quad | \cdot x_2^{n-2}$$

$n \in \mathbb{N}$

$n \geq 3$

$$\boxed{S_n = x_1^n + x_2^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_1 = S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1 \cdot x_1^{n-2} = x_1^{n-1}$$

$$a \cdot S_n + b \cdot S_{n-1} + c \cdot S_{n-2} = 0$$

Pt. $n = 3$: $\quad a \cdot S_3 + b S_2 + c S_1 = 0$

$$S_3 = \frac{-b S_2 - c S_1}{a}$$

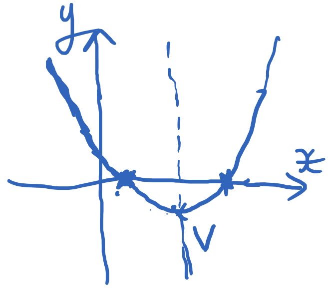
• Semnul funcției de gradul al II-lea $\rightsquigarrow$ depinde de a și de Δ

$f(x) = a x^2 + b x + c$, $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

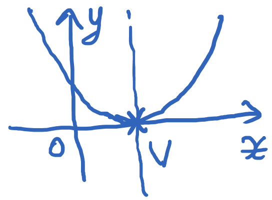
Dacă $a > 0$ și $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$	∞	$+ \quad +$	0	$-$	0	$+ \quad +$	∞



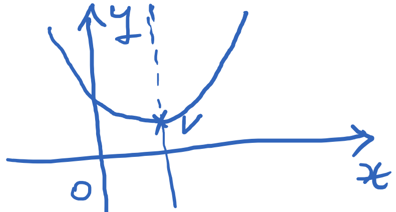
Dacă $a > 0$ și $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
$f(x)$	∞	$+ \quad + \quad +$	0	$+ \quad + \quad +$	∞



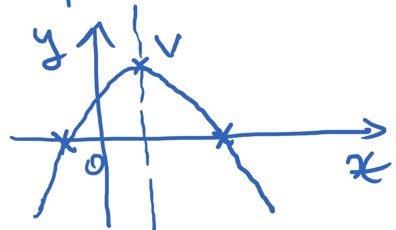
Dacă $a>0$ şi $\Delta<0$

x	$-\infty$					∞
$f(x)$	∞	$+$	$+$	$+$	$+$	∞



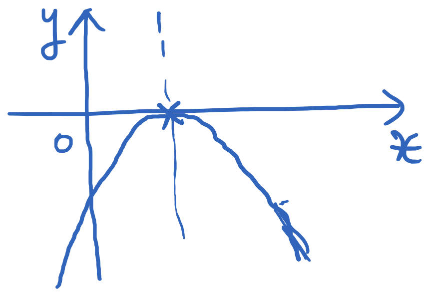
Dacă $a<0$ şi $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$



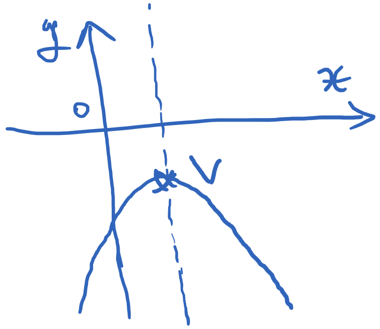
Dacă $a<0$ şi $\Delta=0$

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		∞
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\infty$



Dacă $a<0$ şi $\Delta<0$

x	$-\infty$						∞
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$



Exemple:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2 \leadsto a = 1,\ b = -3,\ c = 2$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 4 \leadsto \Delta = 0$; $x_1 = x_2 = 2$ (răd. ec. $f(x) = 0$)

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1 \leadsto \Delta = -4 < 0$

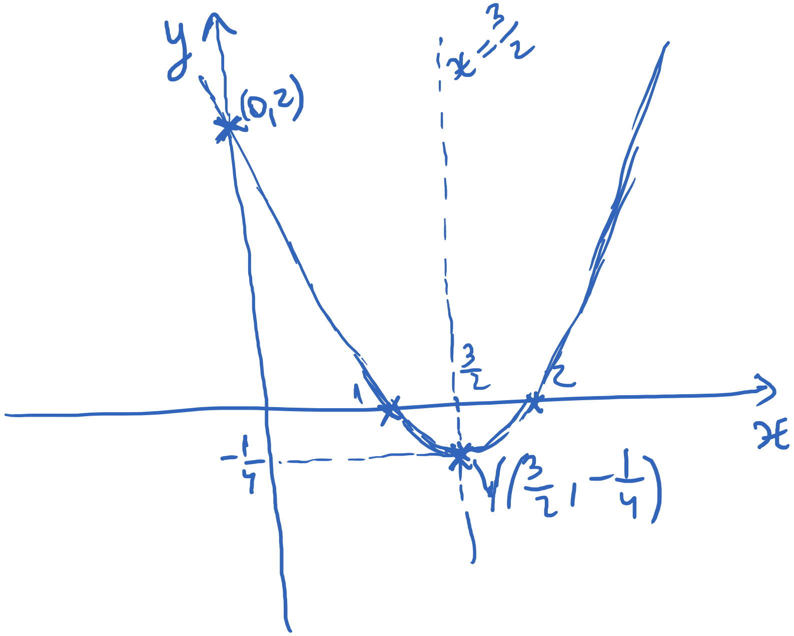
a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$V(x_V, y_V)$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

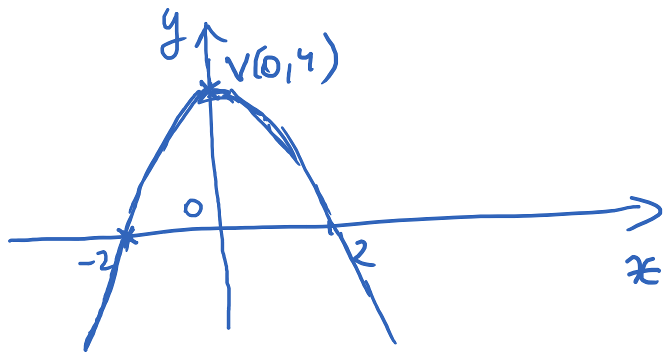
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$



b) $f(x) = 4 - x^2$ $\quad a = -1,\ b = 0,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16$ $\quad x_{1,2} = \pm 2$

$V(0, 4)$



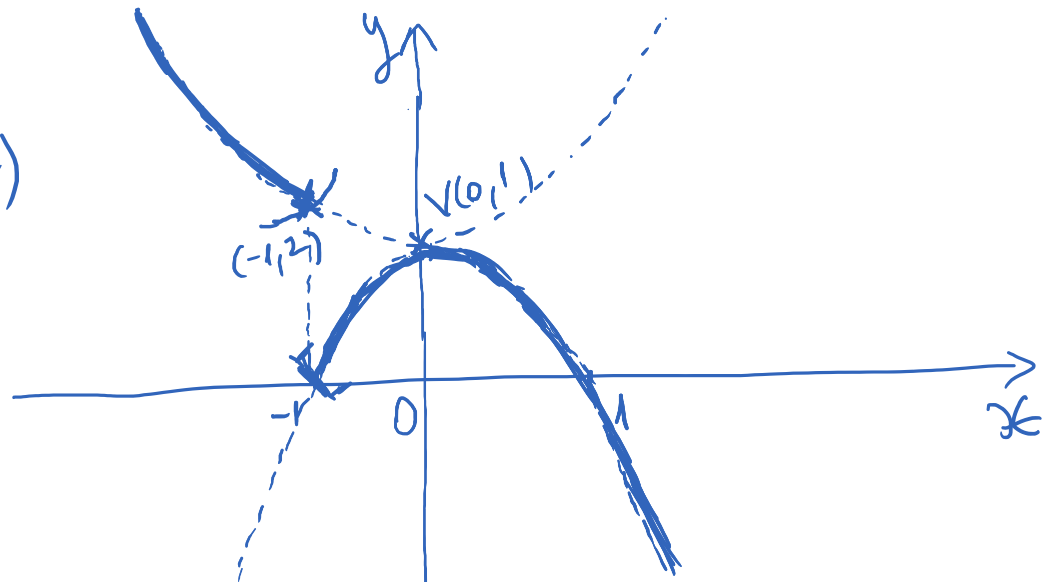
Ex: Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < -1 \\ 1-x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2, & x < 2 \\ 4-x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+7, & x \leq 1 \\ 3x+2, & x > 1 \end{cases}$

a)

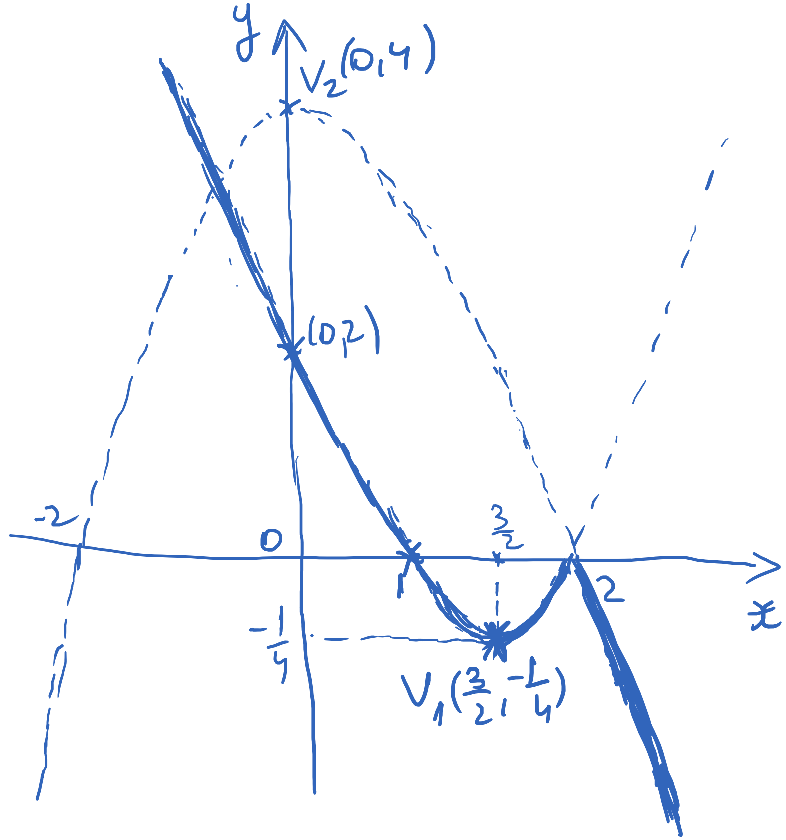


$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

$\Delta = 4$

$V(0,1)$

b)



Ex Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x^2+(m-1)x+m$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)<1$ pentru orice număr real x.

$$f(x)<1,\ \forall x\in\mathbb{R} \iff -x^2+(m-1)x+m<1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\iff \underbrace{-x^2+(m-1)x+m-1}_{\text{funcție de gradul al II-lea}}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$a=-1<0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta<0}$$

$$\Delta=(m-1)^2-4\cdot(-1)\cdot(m-1)=(m-1)^2+4(m-1)=(m-1)(m+3)=$$
$$=m^2+2m-3$$

x	$-\infty$		-3		1		∞
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow \boxed{m\in(-3,1)}$$

Ex: Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 7$.
Arătați că $f(\sqrt{2}) \cdot f(1+\sqrt{2}) \cdot f(2+\sqrt{2}) \cdot \ldots \cdot f(10+\sqrt{2}) = 0$.

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36 - 28 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 3 - \sqrt{2} \\ x_2 = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f(x_1) = 0$$
$$f(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(3+\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) \cdot f(1+\sqrt{2}) \cdot f(2+\sqrt{2}) \cdot \underbrace{f(3+\sqrt{2})}_{0} \cdot \ldots \cdot f(10+\sqrt{2}) = 0$$

<u>Ex</u>: Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$.
Determinați numărul real m astfel încât vârful parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.

$V(x_V, y_V)$ $\qquad x_V = -\frac{b}{2a}$ $\qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -m \\ c = 5 \end{cases}$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x_V = 3} \\ x_V = \frac{m}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Leftrightarrow \boxed{m = 6}$$

Ex: Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 6$. Determinați abscisa punctului de intersecție al graficelor funcțiilor f și g.

$M(x_0, y_0)$ - punct de intersecție al graficelor fct. f și g

dacă: coordonatele lui M verifică sistemul

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x^2 + 2x - 6 \end{cases}$$

$$\cancel{x^2} - 4x = \cancel{x^2} + 2x - 6 \iff 6x = 6 \iff \boxed{x = 1}$$

$x_0 = 1$
abscisa punctului de intersecție

Ordonata pct. de intersecție: $y_0 = -3$

Ex: Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 4$. a) Determinați ordonatele punctelor de intersecție ale graficelor celor două funcții.

b) Determinați valorile lui x pentru care $f(x) \geq 3$.

c) Determinați $(f \circ g)(1)$

d) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(1-a)$

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x + 4 \end{cases}$ $\quad x^2 - 2x = x + 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ abscisele punctelor de intersecție ale graficelor

$\begin{cases} S = 3 \\ P = -4 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 8 \end{array}\right\}$ ordonatele punctelor de intersecție ale graficelor

b) $f(x) \geq 3 \iff x^2 - 2x \geq 3 \iff x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) = 16 > 0$

x	$-\infty$		-1		3		∞
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ (mulțimea sol. inecuației)

$(f\circ g)(1) = ?$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$f(x) = x^2 - 2x$

$g(x) = x + 4$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 - 2(x+4) = (x+4)(x+2) =$

$= x^2 + 6x + 8$

$(f\circ g)(1) = (1+4)(1+2) = 15$

$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$

$a = ?$ a.î. $(f\circ g)(a) = (f\circ g)(1-a)$

$(f\circ g)(a) = a^2 + 6a + 8$

$(f\circ g)(1-a) = (1-a)^2 + 6(1-a) + 8 = 1 - 2a + a^2 + 6 - 6a + 8$

$(f\circ g)(a) = (f\circ g)(1-a) \iff \cancel{a^2} + 6a + \cancel{8} = 1 - 2a + \cancel{a^2} + 6 - 6a + \cancel{8}$

$\iff 14a = 7 \iff \boxed{a = \frac{1}{2}}$

Ex: Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$

a) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție al graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y=2x-3$

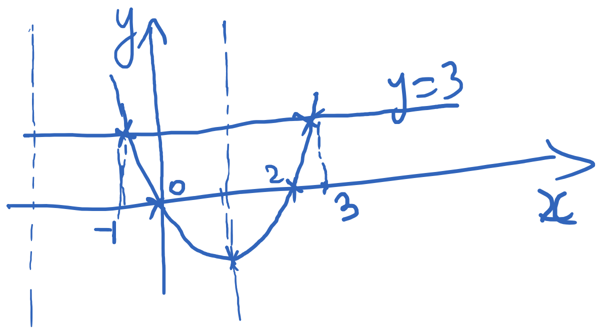
b) Să se determine abscisele punctelor de intersecție ale graficului cu dreapta de ecuație $y=3$.

a) $\begin{cases} y = x^2-2x \\ y = 2x-3 \end{cases}$

$x^2-2x=2x-3 \iff$

$x^2-4x+3=0 \quad \begin{cases} x_1=1 \Rightarrow y_1=-1 \\ x_2=3 \Rightarrow y_2=3 \end{cases}$

Punctele de intersecție $\begin{cases} (1,-1) \\ (3,3) \end{cases}$

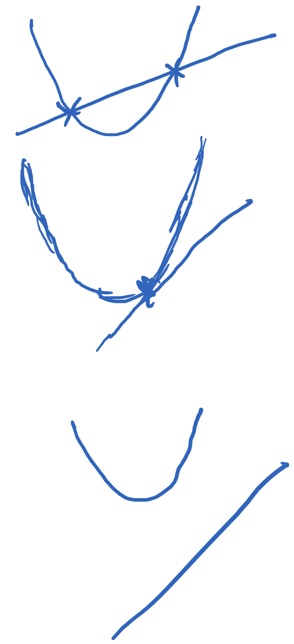
b) 

$\begin{cases} y = x^2-2x \\ y = 3 \end{cases}$

$x^2-2x=3$

$x^2-2x-3=0$

$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$



Ex: Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\Delta_1 = -3 < 0)$

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -2 \quad \Big| \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{>0}$$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 > -2x^2 - 2x - 2$

$\Leftrightarrow \underbrace{3x^2 - (m-2)x + 3}_{\text{fct. de gradul al doilea}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta < 0$

$\Delta = (m-2)^2 - 36 =$
$= m^2 - 4m - 32$ $<$ m_1, m_2

m	$-\infty$		m_1		m_2		∞
$m^2 - 4m - 32$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(m_1 < m_2)$

$m \in (m_1, m_2)$

- Ecuații reductibile la ecuații de gradul al II-lea

  - Ecuații iraționale
  - Ecuații exponențiale și logaritmice

Ex Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-2x-1}$

b) $\sqrt{2x+3} = x+1$

c) $\sqrt{9-x^2} = 2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} = 6$

e) $4^{x^2-5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-3x}$

f) $9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 7 = 0$

f) $(3^x)^2 - 6\cdot 3^x + 7 = 0$

$y = 3^x > 0$ $\quad y^2 - 6y + 7 = 0$

$\Delta = 36 - 28 = 8$

g) $3^{2x^2-1} = 3^{x-2}$

h) $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$

i) $\log_3(-x) = \log_3(x^2-2x-2)$

$(x+2)(2x-1) = 5^2$

j) $\log_5(x+2) + \log_5(2x-1) = 2$

k) $2\cdot\lg(x-2) = \lg x \longrightarrow (x-2)^2 = x$

l) $\lg(x^2+x-2) = 1 + \lg\frac{x-1}{2}$

$\boxed{\lg 10 = 1}$

C.E.
$a > 0, a \neq 1$
$x > 0$
$\log_a x$

$\sqrt{f(x)}$
C.E.
$f(x) \geq 0$

$\sqrt{f(x)} = g(x)$
$f(x) \geq 0$
$g(x) \geq 0$

$3^{x+1} = 3\cdot 3^x$

a) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-2x-1}$

C.E. $\begin{cases} x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \iff x \in [1, \infty) \\ x^2-2x-1 \geq 0 \iff x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [1+\sqrt{2}, \infty)$

$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$
$\not\Leftarrow$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		∞
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Delta = 4+4 = 8$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{cases} 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{cases}$

$\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-2x-1} \quad \Big|^2 \Rightarrow x - \cancel{1} = x^2 - 2x - \cancel{1}$

$\iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \notin [1+\sqrt{2}, \infty) \text{ (nu convine)} \\ x_2 = 3 \in [1+\sqrt{2}, \infty) \text{ (convine)} \end{cases}$

Verificare: $\sqrt{3-1} = \sqrt{9-6-1}$ (adev.)
$\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Deci: $\boxed{x = 3}$

h) $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$b \cdot \log_a x = \log_a(x^b); \quad \log_a a = 1$$

$$a > 0, a \neq 1$$

C.E.

$25x > 0 \iff x > 0$

$x > 0, x \neq 1$

$$\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$$

$\log_5(5^2) = 2$

$$\log_5(25x) + \log_x 5 = 4 \iff \log_5 25 + \log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 4$$

$$\iff 2 + \log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 4$$

$y = \log_5 x \quad (x \neq 1 \Rightarrow y \neq 0)$

$$2 + y + \frac{1}{y} = 4 \;\Big|\cdot y \iff 2y + y^2 + 1 = 4y$$

$$\iff y^2 - 2y + 1 = 0 \iff (y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow \log_5 x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$